

А. И. Короткий, И. А. Цепелев, А. Т. Исмаил-заде

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ РЕТРОСПЕКТИВНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ ГЕОДИНАМИКИ\*

Рассматривается задача о численном моделировании обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой теплопроводной жидкости. Хорошо известно, что подобные задачи являются, как правило, некорректными и требуют для численного решения привлечения методов регуляризации [1–4]. Для решения рассматриваемой задачи ранее было предложено три метода [5–8]: метод обратной адвекции, вариационный метод и метод квазиобращения. Эти методы применялись для восстановления истории развития соляных диапиров, с которыми связаны месторождения углеводородов [7, 8], и мантийных плюмов (структур восходящих горячих потоков в мантии Земли) [9–12]. В данной работе дается краткая характеристика этих методов и проводится их сравнительный анализ. Разработанный метод квазиобращения для решения обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции применяется для моделирования эволюции погружающейся литосферной плиты во Вранче на юго-востоке Карпатских гор. Этот регион характеризуется сильными подземными толчками (землетрясениями) на глубинах 70–180 км как результат сброса напряжений, аккумулирующихся в литосферной плите во время погружения.

Математическая модель термоконтвективных течений высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости в обратном направлении времени в приближении Буссинеска включает в себя [13–15] начально-краевую задачу для определения температуры

$$\begin{cases} \partial T / \partial t + \langle \nabla T, \mathbf{u} \rangle = \Delta T + f, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T + \sigma_2 \partial T / \partial \mathbf{n} = T_b, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T(\vartheta, \mathbf{x}) = T_\vartheta(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

и краевую задачу для определения скорости и давления

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mu \mathbf{e}) = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_3, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta]. \end{cases} \quad (2)$$

---

\*Работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00029) и целевой Программой поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН по направлению «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

Здесь  $\Omega = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times (0, \ell_3) \subset \mathbb{R}^3$  – модельная область изменения пространственных переменных  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$  – вектор скорости движения жидкости;  $\mathbf{e}_3$  – орт вертикальной оси  $Ox_3$ ;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали в точках границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ ;  $p$  – давление;  $\mu$  – вязкость;  $\mathbf{e} = (e_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  – тензор скоростей деформаций;  $\nabla$  – операция взятия градиента;  $\text{div}$  – операция взятия дивергенции;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $T$  – температура;  $T_\vartheta$  – температура при  $t = \vartheta$ ;  $f$  – плотность внутренних источников тепла;  $Ra$  – число Рэлея;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – некоторые кусочно-гладкие неотрицательные функции на  $\partial\Omega$  ( $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$ ). Вместо граничного условия прилипания  $\mathbf{u} = 0$  может рассматриваться граничное условие непротекания с идеальным скольжением  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0$ ,  $\partial \mathbf{u}_\tau / \partial \mathbf{n} = 0$ , где  $\mathbf{u}_\tau$  – проекция вектора скорости на касательную плоскость в точках границы  $\partial\Omega$ .

Физические параметры жидкости (температура, скорость, давление, вязкость, плотность) считаются переменными, зависящими от времени и пространственных координат. Вязкость и плотность могут зависеть от температуры. Соотношения (1) и (2) приведены в безразмерном виде.

Ретроспективная обратная задача тепловой конвекции формулируется следующим образом: найти поле скоростей  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ , давление  $p = p(t, \mathbf{x})$  и температуру  $T = T(t, \mathbf{x})$ , удовлетворяющие при  $t \in [0, \vartheta]$  в области  $\Omega$  краевым задачам (1) и (2). Поскольку эта задача является некорректной, то для ее численного решения необходимо разработать устойчивые методы.

Опишем кратко суть предлагаемых методов решения обратной задачи.

Суть метода обратной адвекции (МОА) состоит в том, что в уравнении теплового баланса пренебрегают диффузией тепла, которая фактически и является источником неустойчивости. Таким образом, в уравнениях тепловой конвекции (1), (2) вместо уравнения (1) рассматривается уравнение переноса

$$\begin{cases} \partial T / \partial t + \langle \nabla T, \mathbf{u} \rangle = f, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T(\vartheta, \mathbf{x}) = T_\vartheta(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

В результате этого преобразования решение задачи в обратном направлении времени существенно упрощается. Для решения задач (2), (3) привлекается какой-либо из устойчивых методов решения [5, 6, 15].

Суть вариационного метода решения обратной задачи (ВАР) состоит в следующем. Рассматривается неотрицательный функционал

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} |T(\vartheta, \mathbf{x}; \varphi) - T_\vartheta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

где  $T(\vartheta, \cdot; \varphi)$  – решение прямой задачи (1), взятое в финальный момент времени  $\vartheta$  и соответствующее некоторому начальному распределению температуры  $\varphi = \varphi(\cdot)$ ;  $T_\vartheta = T(\vartheta, \cdot; T_0)$  – известное распределение температуры, взятое

в финальный момент времени при начальном распределении  $T_0 = T_0(\cdot)$  (оно неизвестно, его и следует найти). Будем искать минимум этого функционала по аргументу  $\varphi$ , принадлежащему некоторому допустимому множеству или всему пространству возможных начальных состояний. Ясно, что наименьшее нулевое значение функционала достигается на единственном элементе  $\varphi^* = T_0$  (единственность минимизирующего элемента следует из единственности решения соответствующей краевой задачи для уравнения теплового баланса):  $J(T_0) = 0$ ,  $J'(T_0) = 0$ .

Нахождение минимума можно осуществить градиентным методом

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \alpha_k J'(\varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

параметры метода – положительные числа  $\alpha_k$  – выбираются некоторым специальным образом, например, методом наискорейшего спуска [1, 2]

$$\alpha_k = \arg \min \{ J(\varphi_k - \alpha J'(\varphi_k)) : \alpha \geq 0 \},$$

где  $\varphi_0$  – некоторое начальное приближение. Значение градиента функционала  $J$  в точке  $\varphi$  определяется равенством

$$J'(\varphi) = \Psi(0, \cdot),$$

где  $\Psi$  – решение так называемой сопряженной краевой задачи:

$$\begin{cases} \partial \Psi / \partial t + \langle \nabla \Psi, \mathbf{u} \rangle = -\Delta \Psi, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 \Psi + \sigma_2 \partial \Psi / \partial \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \Psi(\vartheta, \mathbf{x}) = 2(T(\vartheta, \mathbf{x}; \varphi) - T_\vartheta(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

Легко заметить, что после обращения времени она преобразуется в начально-краевую задачу в прямом направлении времени.

Таким образом, решение задачи (1), (2) вариационным методом фактически сводится к решению серии прямых задач, в которых последовательно определяются приближения  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и которые, как известно, являются корректно поставленными задачами.

Суть метода квазиобращения (МКО) решения обратной задачи состоит в следующем. Рассматривается вспомогательная регуляризованная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial T_\beta}{\partial t} - \langle \nabla T_\beta, \mathbf{u}_\beta \rangle = \Delta T_\beta - \beta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^5 T_\beta}{\partial t \partial x_i^4} + f, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T_\beta + \sigma_2 \partial T_\beta / \partial \mathbf{n} = T_b, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 \partial T_\beta^2 / \partial \mathbf{n}^2 + \sigma_2 \partial T_\beta^3 / \partial \mathbf{n}^3 = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T_\beta(\vartheta, \mathbf{x}) = T_\vartheta(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mu_\beta \mathbf{e}_\beta) = -\nabla p_\beta + Ra T_\beta \mathbf{e}_3, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\beta = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \mathbf{u}_\beta = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta]. \end{cases} \quad (5)$$

Регуляризация в (4) состоит в добавлении дополнительных слагаемых более высокого порядка дифференцирования с некоторым малым параметром регуляризации  $\beta > 0$  и добавлении дополнительного граничного условия. Вспомогательная задача становится устойчивой при  $\beta > 0$ , поэтому для ее решения можно воспользоваться обычными численными методами. Решение вспомогательной возмущенной задачи (4), (5) принимается за приближение к решению исходной невозмущенной задачи (1), (2).

Каждый из упомянутых здесь методов решения обратной ретроспективной задачи имеет свои области эффективного применения. Детали вычислительных методов, ориентированных на применение многопроцессорных ЭВМ, описаны, например, в [5–10, 12, 15] (см. также библиографию в этих работах). Анализ численного моделирования показывает, что метод обратной адвекции сравнительно хорошо работает в тех ситуациях, где тепловая конвекция вещества преобладает над тепловой диффузией, и неудовлетворительно работает в тех ситуациях, где диффузия преобладает над конвекцией [12, 16]. Ниже в табл. 1 и 2 приведены сравнительные характеристики рассматриваемых методов решения задачи.

В качестве примера представим результаты восстановления температурного поля коры и верхней мантии под юго-восточными Карпатами в геологическом прошлом с помощью метода квазиобращения. В качестве исходных данных для такого восстановления использовались данные по сейсмической томографии региона (аномалии скоростей продольных сейсмических волн). Температура  $T_\vartheta$ , которая служит исходной информацией для решения обратной ретроспективной задачи, восстановлена по данным сейсмической томографии [16]. На рис. 1 представлены изоповерхности температурной аномалии

$$\delta T(x_1, x_2, x_3) = \frac{T^*(x_3) - T(x_1, x_2, x_3)}{T^*(x_3)},$$

$$T^*(x_3) = \frac{1}{\ell_1 \ell_2} \int T(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2,$$

соответствующие значениям  $\delta T$ , равным 0.07, 0.14 и 0.21. Данная температурная аномалия определяет местоположение вещества, имеющего более низкую температуру по отношению к температуре окружающей среды.

Для моделирования использовались следующие параметры:  $\ell_3 = 670$  км; отношение между горизонтальными и вертикальным размерами области  $\Omega$  равно 1.5; зависимость вязкости от температуры задавалась выражением

$$\mu(t, \mathbf{x}; T) = \exp(Q/(T + G) - Q/(0.5 + G)),$$

$$Q = 255/\ln(r) - 0.25/\ln(r), \quad G = 15/\ln(r) - 0.5, \quad r = 1000,$$

$\Delta T = 1700$  К, число Рэлея  $Ra = 5.2 \times 10^5$ ,  $\beta = 10^{-5}$ . В модели данного района внутренние источники тепла не учитывались и  $f = 0$ . На боковых гранях  $\Omega$  задавалось условие теплоизолированности  $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$ . В задаче Стокса (5) реализованы граничные условий идеального скольжения с непроницаемостью.

При расчете использовались  $50 \times 50 \times 50$  конечных элементов для аппроксимации векторного потенциала, для аппроксимации вязкости и температуры использовалась сетка из  $148 \times 148 \times 148$  узлов. Для расчета обратной задачи привлекалось 50 процессоров Intel-2400МН. Затраты времени для расчета одного шага по времени приведены в табл. 1. При решении обратной задачи выполнялось 75 шагов по времени назад.

На рис. 2 демонстрируются изоповерхности, соответствующие значениям  $\delta T$ , равным 0.07, 0.14 и 0.21, представляющие графически положение литосферной плиты в геологическом прошлом: *a* – 11 млн лет назад; *b* – 16 млн лет назад; *c* – 22 млн лет назад. Результаты численного моделирования показывают, как холодная литосферная плита погружалась в относительно горячую мантию, а также изменение геометрии плиты и мантийных течений, наведенных этим погружением.

Таким образом, разработанные методы решения трехмерных обратных ретроспективных задач открывают возможность исследования динамических процессов в недрах Земли в далеком прошлом.

Таблица 1. Сравнительная характеристика затрат расчетного времени

Метод	Расчет задачи Стокса на $50 \times 50 \times 50$ конечных элементах, с	Расчет обратной тепловой задачи на сетке из $148 \times 148 \times 148$ узлов, с
ВАР	360	7.5
МКО	100–180	3
МОА	180	2.5

Таблица 2. Сравнительная характеристика методов численного решения обратных ретроспективных задач тепловой конвекции

Метод	МКО	ВАР
Суть метода	Регуляризируется только уравнение теплового баланса	Последовательно решается серия прямых и сопряженных задач для уравнения теплового баланса
Устойчивость	При численной реализации методом конечных разностей теоретически известно условие устойчивости, определяющее параметр $\beta$	Теоретически известно условие устойчивости, определяющее количество итераций
Сходимость	Сходимость регуляризованного решения к решению обратной задачи проверена на многочисленных тестовых примерах	Приближенное решение сходится к точному в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$
Точность решения задачи	В вычислительных экспериментах установлена допустимая точность как на синтетических, так и на реальных геофизических данных	Высокая точность на гладких синтетических данных
Размер интервала по времени	Размер интервала по времени ограничивается погрешностью численного метода	Размер интервала по времени ограничивается гладкостью получаемого решения
Аналитическая работа	Подобрать подходящий регуляризатор и определить условия устойчивости разностной схемы	Выписать сопряженную задачу
Реализация алгоритма	Необходимо разработать подходящий численный метод решения краевой задачи с малым параметром при старшей производной	Требуется разработка численных методов для прямой и сопряженной задач

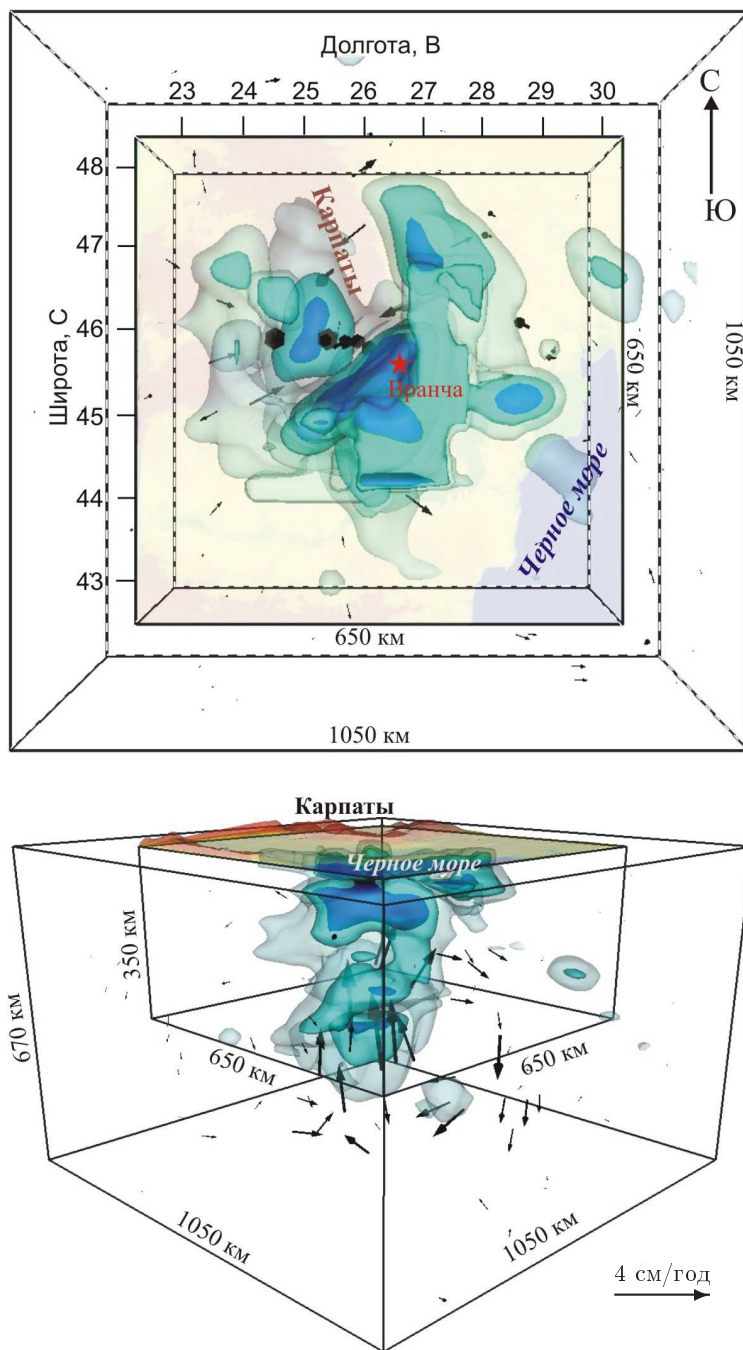


Рис. 1. Аномалии современной температуры коры и мантии под юго-восточными Карпатами

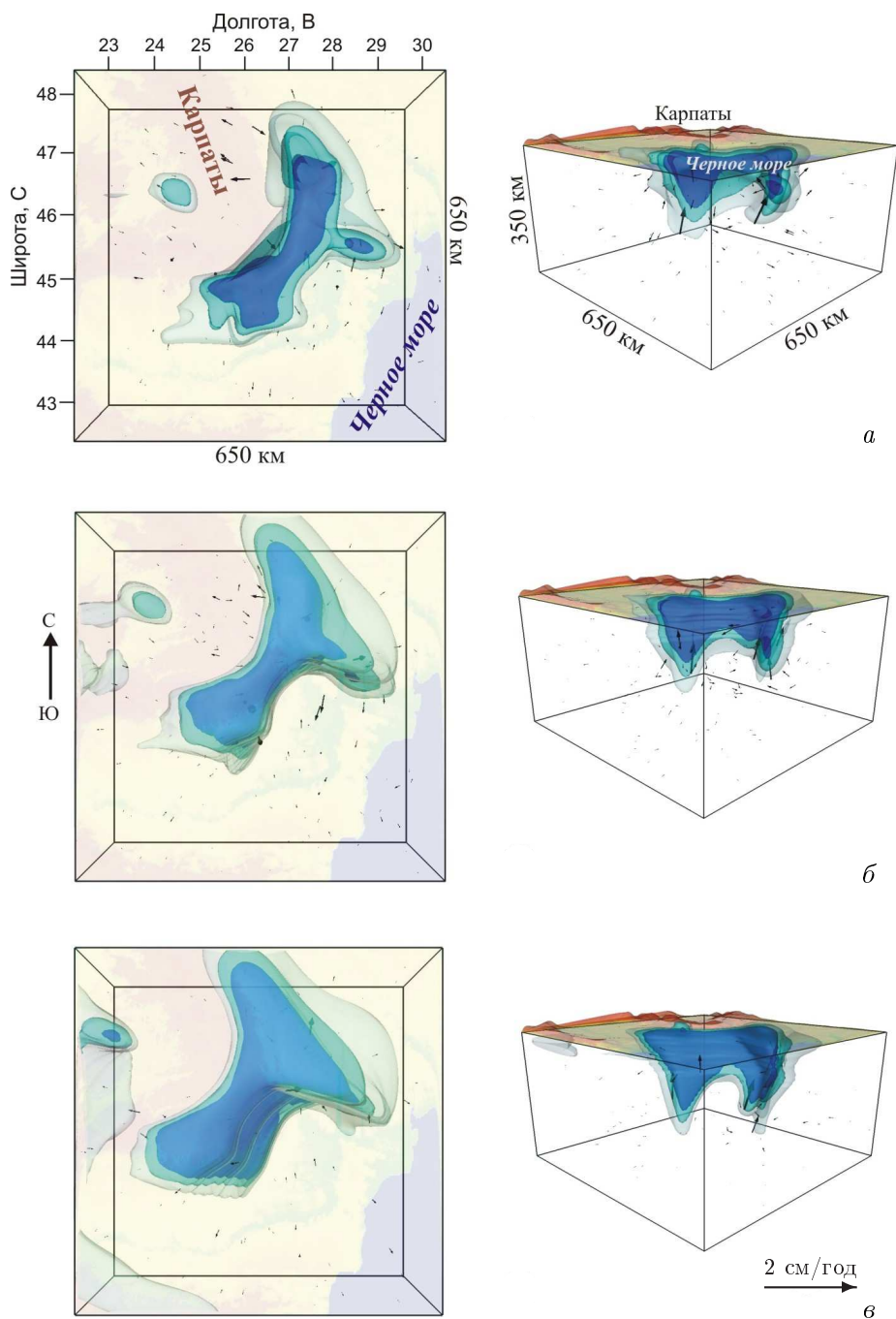


Рис. 2. Аномалии температуры коры и мантии под юго-восточными Карпатами в различные моменты геологического прошлого



## Литература

1. ТИХОНОВ А. Н., АРСЕНИН В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. ИВАНОВ В. К., ВАСИН В. В., ТАНАНА В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М., РОМАНОВ В. Г., ШИШАТСКИЙ С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.
4. ЛАТТЕС Р., ЛИОНС Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
5. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М., ЦЕПЕЛЕВ И. А. Трехмерное численное моделирование обратной задачи тепловой конвекции // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2003. Т. 43, № 4. С. 614–626.
6. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А. Трехмерное численное моделирование обратной задачи тепловой конвекции на основе метода квазиобращения // Там же. 2006. Т. 46, № 12. С. 2277–2288.
7. ISMAIL-ZADEN A. T., TSEPELEV I. A., TALBOT C. J., KOROTKII A. I. Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: Numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics. 2004. Vol. 387. P. 81–103.
8. КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А. Численная реализация метода квазиобращения для решения обратной задачи тепловой неустойчивости Рэлея–Бенара // Изв. Урал. гос. ун-та. 2006. № 46. (Математика и механика; Вып. 10). С. 79–89.
9. ISMAIL-ZADEN A., SCHUBERT G., TSEPELEV I., KOROTKII A. Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2004. Vol. 145. P. 99–114.
10. ISMAIL-ZADEN A., SCHUBERT G., TSEPELEV I., KOROTKII A. Three-dimensional forward and backward numerical modeling of mantle plume evolution: Effects of thermal diffusion // J. Geophysical Research. 2006. Vol. 111, № B6 (B06401, doi:10.1029/2005JB003782).
11. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., КРУПСКИЙ Д. П., ЦЕПЕЛЕВ И. А. и др. Эволюция тепловых плюмов в мантии Земли // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 4. С. 523–526.
12. ISMAIL-ZADEN A., KOROTKII A., SCHUBERT G., TSEPELEV I. Quasi-reversibility method for data assimilation in models of mantle dynamics // Geophysical J. Intern. 2007. Vol. 170, № 3. P. 1381–1398 (doi:10.1111/j.1365-246X.2007.03496.x).
13. ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
14. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

15. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М., ЦЕПЕЛЕВ И. А. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2001. Т. 41, № 9. С. 1399–1415.
16. ISMAIL-ZADEH A., MUELLER B., SCHUBERT G. Three-dimensional modeling of present-day tectonic stress beneath the earthquake-prone southeastern Carpathians based on integrated analysis of seismic, heat flow, and gravity observations // Phys. Earth Planet. Inter. 2005. Vol. 149. P. 81–98.

*Статья поступила 14.11.2007 г.*